1

المحاضرة السادسة

ملاحظات

ملاحظة 1: ليكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية

① $g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\,g(t)\,dt$

λ ليست قيمة خاصة و $K(x,t)$ نواة متردية

ونفرض ان $f_i=0$

$g(x)=f(x)$

الاثبات: حل المعادلة يعطى بالدستور التالي

$g(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_i(x)$ ☆

علماً ان c_i تتحدد من المعادلات الجبرية

$f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=c_i \quad i=1,2,\dots,n$

وبما ان $f_i=0$ فان المعادلات الجبرية

تأخذ الشكل الآتي $(i=1,\dots,n)$ $\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=c_i$

وهي مجموعة معادلات جبرية متجانسة وبما

ان λ ليست قيمة خاصة

$c_1=c_2=\dots=c_n=0$

$c_i=0 \quad i=1,2,\dots,n$

نبدل في ☆ فنحصل $g(x)=f(x)$

ملاحظة 2:

لدينا معادلة فريدهولم التكاملية ①

$K(x,t)$ نواة متردية و λ ليست قيمة خاصة

و $\alpha_{ij}=0$

اثبات: حل المعادلة ① يعطى بالدستور

$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt$

الاثبات

لدينا حل المعادلة يعطى بالدستور

$g(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i\,a_i(x)$ ☆

علماً ان c_i تتحدد من المعادلات الجبرية

$f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=c_i \quad i=1,2,\dots,n$

$f_i=\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt$

وبما ان $\alpha_{ij}=0$ فان

$f_i=c_i=\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt$

نبدل هذه العبارة في ☆ فنحصل على

$g(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} f_i\,a_i(x)$

$=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt\right)a_i(x)$

$=f(x)+\lambda\int_a^b\left(\sum a_i(x)\,b_i(t)\right)f(t)\,dt$

وبما ان النواة $K(x,t)$ متردية بالتالي

$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,b_i(t)$

تطبيقات متنوعة

مثال: بين انه ليس للمعادلة التكاملية

① $g(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\,g(t)\,dt$

اي حل عندما $f(x)=x$ ولكن لها عدد غير منته من الحلول عندما $f(x)=1$ ثم اوجد هذه الحلول

Sol ~~النواة $K(x,t)$ متردية~~

$K(x,t)=\sin(x+t)=\sin x\cos t+\cos x\sin t$

النواة $K(x,t)$ متردية ومنفصلة

$g(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{2} c_i\,a_i(x)$

$a_1(x)=\sin x \qquad a_2(x)=\cos x$

$b_1(t)=\cos t \qquad b_2(t)=\sin t$

$g(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}c_1\sin x+\frac{1}{\pi}c_2\cos x$ ②

c_1,c_2 ثوابت

$$f_i + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \tfrac{1}{\pi}\alpha_{11} c_1 + \tfrac{1}{\pi}\alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \tfrac{1}{\pi}\alpha_{21} c_1 + \tfrac{1}{\pi}\alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$f_i = \int_0^{2\pi} b_i(t)\, f(t)\, dt$$

$$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, f(t)\, dt$$

$$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, f(t)\, dt$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{2\pi} b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$\alpha_{11} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt = 0$$

$$\boxed{\alpha_{11} = 0}$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$$

$$\boxed{\alpha_{12} = \pi}$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi$$

$$\boxed{\alpha_{21} = \pi}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt = 0$$

$$\boxed{\alpha_{22} = 0}$$

نعوض في ③

$$\left.\begin{aligned} f_1 + c_2 &= c_1 \\ f_2 + c_1 &= c_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 - c_2 &= f_1 \\ -c_1 + c_2 &= f_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi}$$

ـه نظرية فريدهولم التكاملية المبدئية

$\int_0^{2\pi} \psi(x)\, f(x)\, dx \neq 0$ ليس لها حل

والمعادلة $\int_0^{2\pi} \psi(x)\, f(x)\, dx = 0$ لا عدد لانهائي من الحلول

حيث $\psi(x)$ حل منقول المعادلة المتجانسة

عند النواة $k(x,t)$ المعطاة متماثلة

هذا يعني أن المعادلات الجبرية للمعادلة

المتجانسة هي نفسها المعادلات الجبرية لمنقول

المعادلة المتجانسة أي أن حل منقول المعادلة

المتجانسة هو نفسه حل المعادلة الأصلية

المعادلة الجبرية المتجانسة المرافقة ④ هي

$$\left.\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = c_2 \ \ \forall c_2, \quad c_2 = c_1 \ \ \forall c_1$$

عدد أبعاد فضاء الحلول يساوي الواحد

وبالتالي حل المعادلة المتجانسة

يحل من العلاقة ② ثم عوض القيم

مع العلم أن $f(x) = 0$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} c_1 \sin x + \frac{1}{\pi} c_1 \cos x$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} c_1 (\sin x + \cos x)$$

وبالتالي $\psi(x) = g(x) = \frac{1}{\pi} c_1 (\sin x + \cos x)$

ص١

١] حالة $f(x) = x$

$$\frac{1}{\pi} c_1 \int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} c_1 \left[x(-\cos x + \sin x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos x + \sin x)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} c_1 \left[(2\pi(-1)) - (-\sin x - \cos x)\Big|_0^{2\pi} \right]$$

$= -2C_1 \neq 0$

المعادلة ليس لها حل

$[2] \quad f(x) = 1$

$\frac{1}{\pi} C_1 \int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} C \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} C(\ldots)$

$= 0$

لها عدد لا نهائي من الحلول

إيجاد هذه الحلول

$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$

$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0$

نعوض في المعادلات 4

$C_1 = C_2 \quad \forall C_2$

نعوض في (2)

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_1 \sin x + \frac{1}{\pi} C_2 \cos x \quad \forall C_2$

وهي الحلول المطلوبة

$[3] \quad f(x) = x \qquad \frac{\pi}{2}$

$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot t\, dt$

$= t \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$

$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot t\, dt$

$= -t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = -2\pi$

بالتعويض في المعادلات

$C_1 - C_2 = 0$

$-C_1 + C_2 = -2\pi$

لا حل لهذه المعادلات لأن المعادلات متناقضة

نعوض $C_1 = C_2$ في المعادلة الثانية

$C_1 = -2\pi \qquad C_1 - C_2 = -2\pi$

$[2] \quad f(x) = 1$

$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$

$f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$

$C_1 - C_2 = 0$
$-C_1 + C_2 = 0$
$\Rightarrow C_1 = C_2 \quad \forall C_2$

إذن المعادلة لها عدد لانهائي من الحلول

المعادلة لها عدد لا نهائي من الحلول

المعادلات التكاملية التي ترد الى معادلات تكاملية متناظرة

اثبت ان النواة في المعادلة التكاملية الآتية ترد الى نواة متناظرة

اثبت ان النواة في المعادلة التكاملية الآتية ترد الى نواة متناظرة ثم أوجد المعادلة

$$(1) \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, p(t)\, g(t)\, dt$$

علماً ان $k(x,t)$ دالة متناظرة

وأن $p(t) > 0$ موجب في المجال $[a,b]$

الحل بضرب طرفي المعادلة $\times \sqrt{p(x)}$ نحصل على

$$\sqrt{p(x)}\, g(x) = \sqrt{p(x)}\, f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, p(t) \sqrt{p(x)}\, g(t)\, dt$$

نعرف تابع مجهول جديد هو

$$\psi(x) = \sqrt{p(x)}\, g(x)$$

مع العلم ان

$$p(t) = \sqrt{p(t)}\, \sqrt{p(t)}$$

$$\psi(x) = \sqrt{p(x)}\, f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \sqrt{p(t)\, p(x)}\ \psi(t)\, dt$$

$$L(x,t) = k(x,t)\sqrt{p(t)\, p(x)}$$

وهي نواة متناظرة $k(x,t) = k(t,x)$

وذلك لأن

$$L(t,x) = k(t,x)\sqrt{p(x)\, p(t)}$$

لأن $k(x,t)$ نواة متناظرة هذا يعني أن

$$L(x,t) = L(t,x)$$

أي حصلنا على معادلة تكاملية ذات نواة متناظرة

مثال: أثبت أن للمعادلة التكاملية الآتية

$$g(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\sin x \sin 2t + \sin 2x \sin 4t]\, g(t)\, dt + ax^2 + bx + c$$

حلاً وحيداً من أجل أي قيمة للمقدار a, b, c, λ ثم أوجد هذه الحلول

$k(x,t) = \sin x \sin 2t + \sin 2x \sin 4t$

$a_1(x) = \sin x \qquad a_2(x) = \sin 2x$

$b_1(t) = \sin 2t \qquad b_2(t) = \sin 4t$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i\, a_i(x) \quad (2)$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c + \lambda c_1 \sin x + \lambda c_2 \sin 2x$$

c_1, c_2 مجهولان

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij}\, c_j = c_i \qquad i = 1,2$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} (3)$$

$$f_i = \int_0^{\pi} b_i(t)\, f(t)\, dt$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\pi} b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$f_1 = \int_0^{\pi} \sin 2t\, (at^2 + bt + c)\, dt$$

$$= a\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t\, dt + b\int_0^{\pi} t \sin 2t\, dt + c\int_0^{\pi} \sin 2t\, dt$$

بالتكامل بالتجزئة

$$\boxed{f_1 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{2}}$$

$$f_2 = \int_0^{\pi} \sin 4t\, (at^2 + bt + c)\, dt$$

$$\boxed{f_2 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{4}}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^{\pi} \sin t \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} [\cos(2t - t) - \cos(2t + t)]\, dt\right] = 0$$

$$\boxed{\alpha_{11} = 0}$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\alpha_{12} = \frac{\pi}{2}}$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{\pi} \sin 4t \sin t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(4t - t) - \cos(4t + t))\, dt = 0$$

$$\boxed{\alpha_{21} = 0}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^{\pi} \sin 4t \cdot \sin 2t\, dT = 0$$

$$\boxed{\alpha_{22} = 0}$$

$* K(x,t) = 3xt + 5x^2t^2$

$a_1(x) = 3x \qquad a_2(x) = 5x^2$

$b_1(t) = t \qquad b_2(t) = t^2$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x)$

$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3\lambda c_1 x + 5\lambda c_2 x^2$ ②

$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i \qquad i=1,2$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} ③$$

$f_i = \int_a^b b_i(t) f(t)$

$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t) a_j(t)$

ومن [illegible] = نحصل

$f_1 = \frac{2}{3}\beta \qquad f_2 = \frac{2}{5}\alpha$

$\alpha_{11} = 2 \qquad \alpha_{12} = 0 \qquad \alpha_{21} = 0 \qquad \alpha_{22} = 2$

نعوض في ③

$$\left.\begin{aligned} (1-2\lambda)c_1 &= \frac{2}{3}\beta \\ (1-2\lambda)c_2 &= \frac{2}{5}\alpha \end{aligned}\right\} ④$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)^2$$

نعوض في ③

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \frac{\lambda\pi}{2} c_2 &= \frac{a\pi^2 + b\pi}{2} \\ c_2 &= \frac{a\pi^2 + b\pi}{4} \end{aligned}\right\} ④$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda\pi}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

حسب نظرية فريدهولم المعادلة لها حل وحيد من أجل جميع قيم للثوابت a, b, c

بحل المعادلتين ④ نحصل

$c_1 = (a\pi + b)\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2\lambda}{8}\right)$

$c_2 = \frac{a\pi^2 + b\pi}{4}$

نعوض في ② يكون الحل

مثال: لتكن لدينا المعادلة التكاملية الآتية

$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \lambda \int (3xt + 5x^2t^2) g(t)\,dt$

المطلوب: 1] اوجد القيم الخاصة والدوال الخاصة المرافقة لكل قيمة خاصة للمعادلة التكاملية المتجانسة المرافقة للمعادلة المعطاة

2] اوجد حلول المعادلة التكاملية وذلك من أجل جميع القيم الممكنة α و β

لإيجاد القيم الخاصة $D(\lambda)=0$

$(1-2\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

إيجاد الدوال الخاصة الموافقة لهذه القيمة الخاصة

نوجد حل المعادلة المتجانسة الموافقة لـ (1) في حال القيمة الخاصة $\lambda=\frac{1}{2}$

المعادلات الجبرية المتجانسة الموافقة للمعادلات الأصلية (4)

$(1-1)c_1=0$
$(1-1)c_2=0$

$\Rightarrow 0c_1=0 \Rightarrow \forall c_1$

$0c_2=0 \Rightarrow \forall c_2$

حل (1) بدلالة c_1 و c_2 [illegible] مع العلم أن $f(x)=0$ [illegible]

$g(x)=\frac{3}{2}c_1x+\frac{5}{2}c_2x^2 \quad \forall c_1, c_2$

[illegible] الدوال الخاصة الموافقة

$g_1^{(1)}(x)=\frac{3}{2}x$

$g_1^{(2)}(x)=\frac{5}{2}x^2$

2] لإيجاد حل المعادلة (1) [illegible]

$\lambda\neq\frac{1}{2} \Rightarrow D(\lambda)\neq 0$

المعادلة المعطاة تقبل حل وحيد

إيجاد [illegible] من المعادلات (4)

$c_1=\frac{2\beta}{3(1-2\lambda)} \qquad c_2=\frac{2\alpha}{5(1-2\lambda)}$

حل ح (2)

$g(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x}{1-2\lambda}$

[illegible] α, β

[illegible] $D(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

حل جملة (4)

$0c_1=\frac{2}{3}\beta \Rightarrow \frac{2}{3}\beta=0$

$0c_2=\frac{2}{5}\alpha \Rightarrow \frac{2}{5}\alpha=0$

متى تكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول يجب أن تحقق الشرط

$\alpha=\beta=0$

$0c_1=0 \quad \forall c_1$

$0c_2=0 \quad \forall c_2$

حل [illegible] c_1, c_2 [illegible] (2) [illegible]

[illegible] $\alpha=\beta=0$

$g(x)=\frac{3}{2}c_1x+\frac{5}{2}c_2x^2$

حل (3) [illegible]